ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 2η ΔΕΚΑΔΑ

11.

Στο λογαριασμό του ΟΤΕ πληρώνουμε πάγιο τέλος κάθε μήνα 12 € και για κάθε μονάδα ομιλίας 0,09 €.

α) Να βρείτε έναν τύπο που να μας δίνει το ποσό των χρημάτων y που θα πληρώσουμε για x μονάδες ομιλίας.

β) Αν κάποιο μήνα κάνουμε 300 μονάδες ομιλίας, να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσουμε, αν γνωρίζετε ότι το συνολικό ποσό του λογαριασμού επιβαρύνεται και με ΦΠΑ 23% .

Προτεινόμενη λύση

α)

Οι x μονάδες ομιλίας κοστίζουν 0,09x. Επομένως το συνολικό ποσό y που θα πληρώσουμε δίνεται από τον τύπο $y = 0{,}09x + 12$ €

β)

Για $x = 300$ έχουμε $y = 0{,}09\cdot 300 + 12 = 39$ €

Ο ΦΠΑ στο παραπάνω ποσό είναι $\frac{23}{100}\cdot 39 = 8{,}97$, επομένως το ποσό που τελικά θα πληρώσουμε είναι $39 + 8{,}97 = 47{,}97$€

12.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία έχει κλίση 2 και διέρχεται από το σημείο Α(1, 5).

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας με τους άξονες.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές την αρχή των αξόνων και τα σημεία τομής της παραπάνω ευθείας με τους άξονες.

Προτεινόμενη λύση

α)

Έστω $y = αx + β$ η ζητούμενη εξίσωση ευθείας.

Επειδή η κλίση της είναι 2, έχουμε ότι $α = 2$. Οπότε η εξίσωση γίνεται $y = 2x + β$

Και επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1, 5), ισχύει $5 = 2\cdot 1 + β$ άρα $β = 3$.

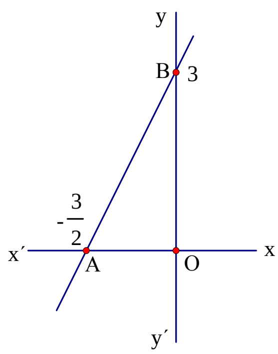
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 2x + 3$

β)

Για $x = 0$ έχουμε $y = 3$, συνεπώς το σημείο τομής με τον άξονα των y είναι το $(0 , 3)$

Για $y = 0$ έχουμε $x = -\frac{3}{2}$, συνεπώς το σημείο τομής με τον άξονα των x είναι το $\left(-\frac{3}{2} , 0\right)$

γ)



Η γραφική παράσταση της ευθείας φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Το τρίγωνο του οποίου ζητάμε το εμβαδόν είναι το ΟΑΒ. Όμως $ΟΒ = 3$ και $ΟΑ = \frac{3}{2}$, άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με $(AOB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ τετραγωνικές μονάδες

13.

Ένα κυκλικός τομέας βρίσκεται σε κύκλο ακτίνας 6cm και έχει εμβαδόν $4{,}71cm^2$.

α) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\omega}$ του κυκλικού τομέα.

β) Να υπολογίσετε το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού πολυγώνου του οποίου η κεντρική γωνία είναι η $\hat{\omega}$.

γ) Να υπολογίσετε την γωνία του παραπάνω πολυγώνου.

Προτεινόμενη λύση

α)

Ο τύπος $E = \frac{\pi\rho^2\mu}{360}$ με βάση τα δεδομένα δίνει $4{,}71 = \frac{3{,}14 \cdot 6^2 \cdot \omega}{360}$

οπότε $\omega = 15$

άρα $\hat{\omega} = 15^o$

β)

Αν ν είναι το πλήθος των πλευρών, τότε $15 = \frac{360}{\nu}$ άρα $\nu = 24$

γ)

Έστω $\hat{\varphi}$ η ζητούμενη. Τότε είναι $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^o$, άρα $\hat{\varphi} = 180^o - \hat{\omega} =$

$= 180^o - 15^o = 165^o$

14.

Τα χρήματα σε € που είχαν 10 μαθητές της Β΄ τάξης ενός Γυμνασίου ήταν

2 , 3, 4, 3, 3, 2, 4, 3, 5, 4

α) Να γίνει ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων και σχετικών % συχνοτήτων της κατανομής.

β) Να υπολογίσετε την μέση τιμή της κατανομής.

γ) Να βρείτε την διάμεσο της κατανομής.

Προτεινόμενη λύση

α)

Ποσό χρημάτων	Συχνότητα	Σχετική % Συχνότητα
2	2	20
3	4	40
4	3	30
5	1	10
Σύνολο	10	100

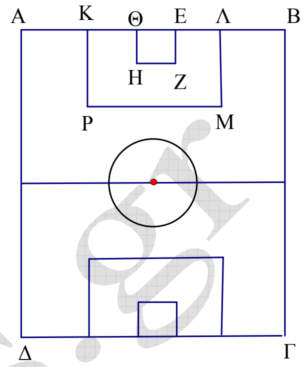
β)

Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι $2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 1 = 33$

Οπότε η μέση τιμή της κατανομής είναι μέση τιμή $= \frac{33}{10} = 3{,}3$ €

γ)
Τοποθετούμε τις παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά
2, 2, 3, 3, 3, 3 , 4 , 4, 4, 5
Οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι 3 και 3, επομένως η διάμεσος είναι $\frac{3+3}{2} = 3$ €

15.



Το διπλανό ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ένα γήπεδο ποδοσφαίρου με διαστάσεις 80m και 110m .
Το ορθογώνιο ΕΖΗΘ είναι μία από τις μικρές περιοχές του γηπέδου με διαστάσεις ΘΕ = 7m και ΘΗ = 3m, και το ορθογώνιο ΚΛΜΡ είναι η μια από τις μεγάλες περιοχές με διαστάσεις ΚΛ = 40m και ΚΡ = 25m.
Ο κύκλος της σέντρας έχει ακτίνα 10m.
Να υπολογίσετε :
α) Το εμβαδόν του γηπέδου.
β) Το εμβαδόν του μέρους εκείνου του γηπέδου που βρίσκεται μεταξύ μικρής και μεγάλης περιοχής και στα δύο μέρη του γηπέδου.
γ) Τ εμβαδόν του μέρους του γηπέδου το οποίο βρίσκεται έξω από τον κύκλο της σέντρας και έξω από κάθε μεγάλη περιοχή.

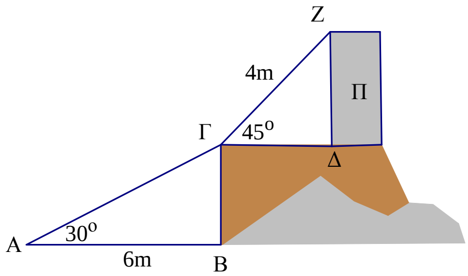
Προτεινόμενη λύση

α)
Το εμβαδόν του γηπέδου είναι ίσο με Ε = 80·110 = 8800 m^2

β)
Σε κάθε μέρος του γηπέδου, το εμβαδόν μεταξύ μεγάλης και μικρής περιοχής είναι
$Ε_1$ = (ΚΡΜΛ) – (ΘΗΖΕ) = 40·25 – 7·3 = 979 m^2
Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με 2·979 = 1958 m^2

γ)
Το εμβαδόν της κάθε μεγάλης περιοχής είναι 40·25 = 1000 m^2
Το εμβαδόν του κύκλου είναι $πρ^2 = 3{,}14 \cdot 10^2 = 314$ m^2
Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $Ε_2$ = 8800 –2·1000 –314 = 6486 m^2

16.



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας πύργος Π. Από το σημείο Α, για να φτάσουμε στον πύργο, πρέπει να ανέβουμε τη σκάλα ΑΓ και στη συνέχεια να βαδίσουμε στον δρόμο ΓΔ.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της σκάλας ΑΓ.
β) Να υπολογίσετε το ύψος ΔΖ του πύργου.
γ) Πόσο ψηλότερα είναι η στέγη του πύργου από το σημείο Α;

(Δίνεται ότι $\sqrt{2} = 1{,}41$ και $\sqrt{3} = 1{,}73$)

Προτεινόμενη λύση

α)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\text{συν}30^o = \dfrac{AB}{A\Gamma}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{A\Gamma}$ άρα

$$1{,}73A\Gamma = 12$$
$$A\Gamma = \frac{12}{1{,}73} \approx 6{,}94 \text{ m}$$

β)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΔΖ έχουμε $\eta\mu 45^o = \dfrac{\Delta Z}{\Gamma Z}$ άρα $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\Delta Z}{4}$

$$2\Delta Z = 4\cdot\sqrt{2}$$
$$\Delta Z = 2{,}82 \text{ m}$$

γ)

Η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με ΒΓ + ΔΖ.

Για το ΒΓ, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\varepsilon\varphi 30^o = \dfrac{B\Gamma}{AB}$ άρα $\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{B\Gamma}{6}$

$$B\Gamma = 2\sqrt{3} = 3{,}46 \text{ m}$$

Οπότε το ζητούμενο ύψος είναι $2{,}82 + 3{,}46 = 6{,}28$ m

17.

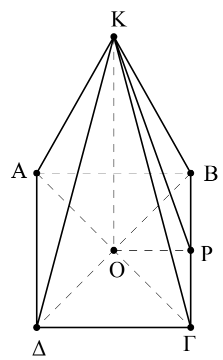
Μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με διαγώνιο $\delta = 12\sqrt{2}$ m και ύψος 8m.

α) Να υπολογίσετε την πλευρά της βάσης της πυραμίδας.
β) Αν η πλευρά της βάσης είναι 12 m, να υπολογίσετε το απόστημα της πυραμίδας , την ολική της επιφάνεια, και τον όγκο της.

Προτεινόμενη λύση

α)

ΚΟ το ύψος της πυραμίδας και ΚΡ το απόστημά της
Αν α είναι η πλευρά της βάσης, από το Πυθαγόρειο στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε



$AB^2 + B\Gamma^2 = A\Gamma^2$ άρα $\alpha^2 + \alpha^2 = (12\sqrt{2})^2$

$$2\alpha^2 = 288$$
$$\alpha^2 = 144$$
$$\alpha = \sqrt{144} = 12 \text{ m}$$

β)

Προφανώς είναι $OP = \frac{\alpha}{2} = 6$ m

Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΟΚΡ : $KP^2 = KO^2 + OP^2 = 8^2 + 6^2 = 100$

άρα $KP = \sqrt{100} = 10$ m

$E_{βάσης} = \alpha^2 = 12^2 = 144m^2$

$E_{παράπλευρης} = \frac{1}{2}$ (περίμετρος βάσης)·(απόστημα) $= \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 \cdot 10 = 240m^2$ οπότε

$E_{ολικό} = E_{παράπλευρης} + E_{βάσης} = 240 + 144 = 384\ m^2$

Όγκος $V = \frac{1}{3}$ (εμβαδόν βάσης)(ύψος) $= \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 384\ m^3$

18.

Δίνονται οι εξισώσεις $(3\lambda - 12)x = 0$ και $(2 + \kappa)x = 6$

Αν η πρώτη είναι ταυτότητα και η δεύτερη αδύνατη, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2(\lambda + 3\kappa) - 2\lambda + 3\kappa + \left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2$

Προτεινόμενη λύση

Αφού η εξίσωση $(3\lambda - 12)x = 0$ είναι ταυτότητα, πρέπει $3\lambda - 12 = 0$ άρα

$3\lambda = 12$

$\lambda = 4$

Αφού η εξίσωση $(2 + \kappa)x = 6$ είναι αδύνατη πρέπει $2 + \kappa = 0$ άρα

$\kappa = -2$

Για $\lambda = 4$ και $\kappa = -2$ η παράσταση Α γίνεται $A = 2(4 - 6) - 8 - 6 + \left(\frac{4}{-2}\right)^2 =$

$= 2(-2) - 8 - 6 + (-2)^2 =$

$= -4 - 8 - 6 + 4 = -14$

19.

Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα xOy δίνονται τα σημεία

$$A\left(2x-3,\ y+\frac{1}{4}\right) \quad \text{και} \quad B\left(5x-\frac{1}{2},\ 2-4y\right)$$

Να βρείτε τις τιμές των x και y ώστε

α) Τα σημεία να είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα των x.

β) Το Α να βρίσκεται στο $2^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

γ) Το Β να βρίσκεται στο $4^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο.

δ) Τα σημεία Α, Β να είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο του συστήματος.

Προτεινόμενη λύση

α)

Θα πρέπει να έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετη τεταγμένη.

Δηλαδή πρέπει $2x-3=5x-\frac{1}{2}$ και $y+\frac{1}{4}=-(2-4y)$

$$3x=\frac{1}{2}-3 \quad \text{και} \quad y+\frac{1}{4}=-2+4y$$

$$3x=-\frac{5}{2} \quad \text{και} \quad 3y=2+\frac{1}{4}$$

$$x=-\frac{5}{6} \quad \text{και} \quad y=\frac{3}{4}$$

β)

Πρέπει η τετμημένη να είναι αρνητική και η τεταγμένη θετική.

Δηλαδή $2x-3<0$ και $y+\frac{1}{4}>0$

$$2x<3 \quad \text{και} \quad y>-\frac{1}{4}$$

$$x<\frac{3}{2} \quad \text{και} \quad y>-\frac{1}{4}$$

γ)

Πρέπει η τετμημένη να είναι θετική και η τεταγμένη αρνητική

Δηλαδή $5x-\frac{1}{2}>0$ και $2-4y<0$

$$5x>\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad 4y>2$$

$$x>\frac{1}{10} \quad \text{και} \quad y>\frac{1}{2}$$

δ)

Πρέπει να έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

Δηλαδή πρέπει $2x-3=-\left(5x-\frac{1}{2}\right)$ και $y+\frac{1}{4}=-(2-4y)$

$$2x-3=-5x+\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y+\frac{1}{4}=-2+4y$$

$$7x=\frac{7}{2} \quad \text{και} \quad 3y=\frac{9}{4}$$

$$x=\frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y=\frac{3}{4}$$

20 .

α) Να λυθούν οι ανισώσεις **i.** $\frac{4(x-5)}{5} - 1 < \frac{3x}{10} - \frac{18}{5}$

ii. $10(x + 3) - 108 > -(101-3x) - 4x$

β) Να βρεθούν οι κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων

Προτεινόμενη λύση

α)

i) $\frac{4(x-5)}{5} - 1 < \frac{3x}{10} - \frac{18}{5}$ άρα $10\cdot\frac{4(x-5)}{5} - 1\cdot 10 < 10\cdot\frac{3x}{10} - 10\cdot\frac{18}{5}$

$8(x-5) - 10 < 3x - 36$

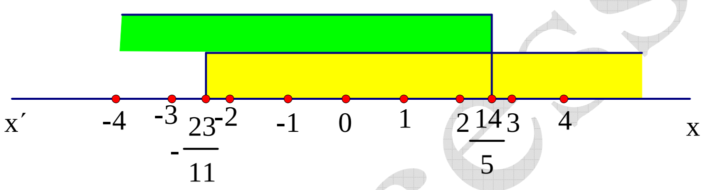
$8x - 40 - 10 < 3x - 36$

$5x < 14$ δηλαδή $x < \frac{14}{5}$

ii. $10(x + 3) - 108 > -(101-3x) - 4x$ άρα $10x + 30 - 108 > -101 + 3x - 4x$

$11x > -23$ δηλαδή $x > -\frac{23}{11}$

β)



Από τον παραπάνω άξονα βλέπουμε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν όταν

$$-\frac{23}{11} < x < \frac{14}{5}$$

Οι ακέραιες τιμές του διαστήματος αυτού είναι οι $x = -2, -1, 0, 1, 2$